Matemáticas: aplicaciones e interpretación
Nivel superior
Prueba 1

Jueves 6 de mayo de 2021 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

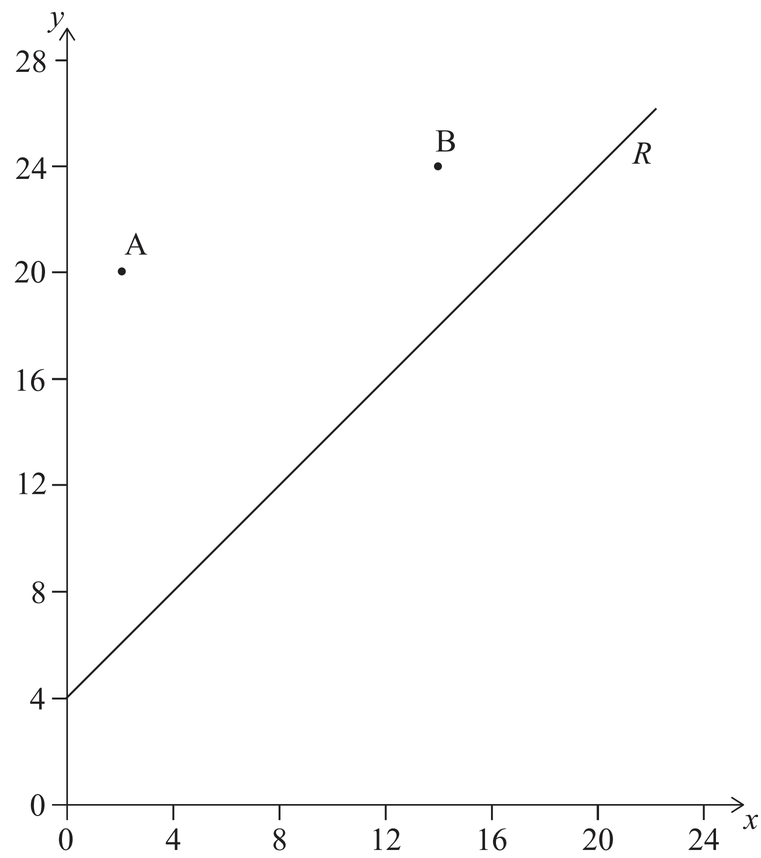
- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas.
- Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de matemáticas: aplicaciones e interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2221 – 7221

Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 7]

Dos colegios aparecen representados por los puntos $\mathrm{A}(2,\ 20)$ y $\mathrm{B}(14,\ 24)$ en el siguiente gráfico. Una carretera, representada por la recta R cuya ecuación es $-x+y=4$, pasa cerca de esos colegios. Le piden a un arquitecto que determine la ubicación de una nueva parada de autobús en esa carretera, de tal modo que esté a la misma distancia de los dos colegios.



(a) Halle la ecuación de la mediatriz de $[\mathrm{AB}]$. Dé la ecuación en la forma $y=mx+c$. [5]

(b) Determine las coordenadas del punto de R donde habría que colocar la parada de autobús. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 7]

Una función viene dada por $f(x) = 2 - \frac{12}{x+5}$, para $-7 \le x \le 7$, $x \ne -5$.

(a) Halle el recorrido de f. [3]

(b) Halle una expresión para la función inversa $f^{-1}(x)$. No es necesario indicar el dominio. [3]

(c) Escriba el recorrido de $f^{-1}(x)$. [1]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 6]

En la Universidad de Springfield, se anotaron los pesos (en kg) de 10 conejos chinchilla y de 10 conejos sable americano. El objetivo era averiguar si, en general, los conejos chinchilla pesan más que los conejos sable americano. Los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla.

Peso de los conejos chinchilla (kg)	4,9	4,2	4,1	4,4	4,3	4,6	4,0	4,7	4,5	4,4
Peso de los conejos sable americano (kg)	4,2	4,1	4,1	4,2	4,5	4,4	4,5	3,9	4,2	4,0

Deciden realizar una prueba t de Student a un nivel de significación del 5%.

(a) Escriba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. [2]

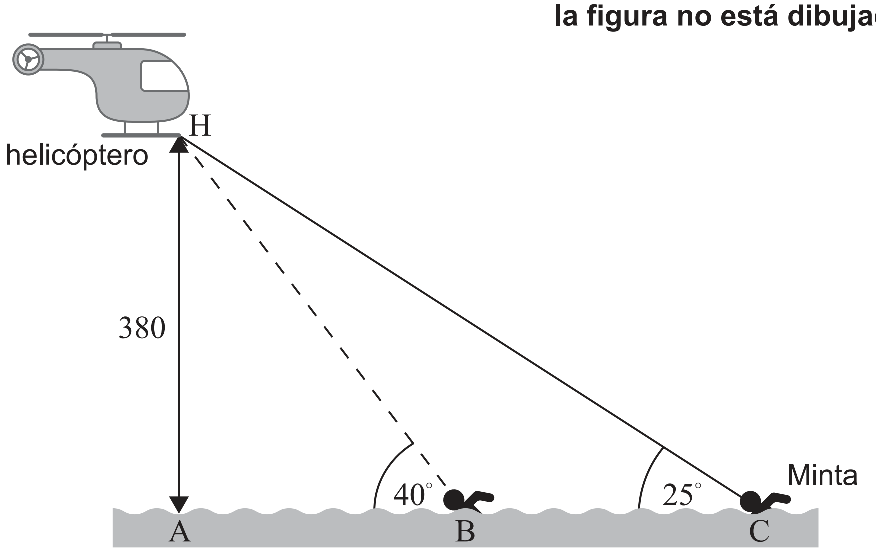
(b) Halle el valor del parámetro p correspondiente a esta prueba. [2]

(c) Escriba la conclusión a la que se llega con esta prueba. Dé una razón que justifique su respuesta. [2]

4. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra un helicóptero suspendido en el punto H, a una altura vertical de $380\,\mathrm{m}$ sobre un lago. El punto A es el punto de la superficie del lago que se encuentra justo debajo del helicóptero.

la figura no está dibujada a escala



Minta está nadando a velocidad constante hacia el punto A. Minta ve el helicóptero desde el punto C cuando mira hacia arriba con un ángulo de 25°. Al cabo de 15 minutos, Minta se encuentra en el punto B y ve el mismo helicóptero con un ángulo de 40°.

(a) Halle la distancia que hay entre A y C. [2]

(b) Halle la distancia que hay entre B y C. [3]

(c) Halle la velocidad de Minta (en metros por hora). [1]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Puntuación máxima: 5]

Roger se compra una computadora portátil nueva que cuesta 495 £. Al mismo tiempo, le compra a su hija Chloe una computadora portátil de alta gama que cuesta 2200 £.

Se prevé que la computadora de Roger se vaya depreciando a un ritmo del 10% anual, mientras que la computadora de Chloe se irá depreciando a un ritmo del 15% anual.

(a) Estime cuál será el valor de la computadora de Roger al cabo de 5 años. [2]

Las computadoras de Roger y Chloe tendrán el mismo valor k años después de haberlas comprado.

(b) Halle el valor de k. [2]

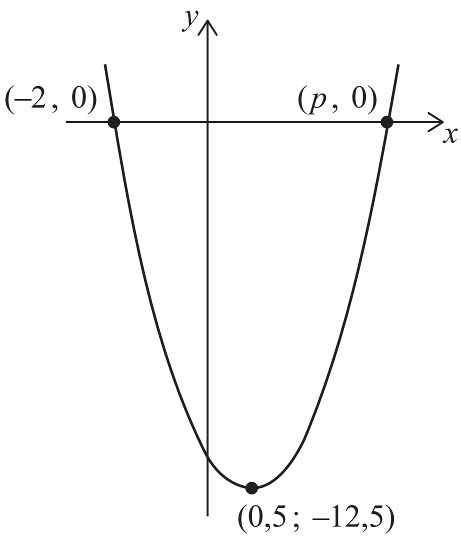
(c) Comente la validez de la respuesta que dio en el apartado (b). [1]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

6. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. En la siguiente figura se muestra el gráfico de $y = f(x)$. El vértice del gráfico tiene por coordenadas $(0,5\,;\ -12,5)$. El gráfico corta al eje x en dos puntos, $(-2\,,\ 0)$ y $(p\,,\ 0)$.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle el valor de p. [1]

(b) Halle el valor de:

(i) a

(ii) b

(iii) c [5]

(c) Escriba la ecuación del eje de simetría del gráfico. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 6: continuación)

7. [Puntuación máxima: 6]

Un meteorólogo decide modelizar la altura a la que se encuentra un globo aerostático que se ha lanzado desde el suelo. El modelo supone que el globo se mueve verticalmente hacia arriba y que recorre 450 metros en el primer minuto.

Debido a que la temperatura va bajando a medida que el globo asciende, la velocidad del globo irá disminuyendo de manera continua. El modelo sugiere que, en un minuto dado, el globo solo recorrerá un 82% de la distancia recorrida en el minuto anterior.

(a) Halle a qué altura llegará el globo en los primeros 10 minutos después de ser lanzado. [3]

(b) El globo tiene que alcanzar una altura de al menos 2520 metros.

Determine si alcanzará esa altura. [2]

(c) Sugiera una limitación del modelo dado. [1]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. [Puntuación máxima: 7]

Dos rectas L_1 y L_2 vienen dadas por las siguientes ecuaciones, donde $p \in \mathbb{R}$.

$$L_1:\ r = \begin{pmatrix} 2 \\ p+9 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ 2p \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$L_2:\ r = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ p+12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} p+4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Se sabe que L_1 y L_2 son perpendiculares.

(a) Halle el posible valor (o los posibles valores) de p. [3]

(b) En el caso de que $p < 0$, determine si las rectas se cortan. [4]

. . . .

9. [Puntuación máxima: 8]

Una tienda de periódicos de Singapur está tratando de predecir cuántos ejemplares de *The Straits Times* va a vender. La tienda crea un modelo para predecir el número de ejemplares que se venderán cada día laborable. Según este modelo, esperan vender todos los días el mismo número de ejemplares.

Para poner a prueba el modelo, deciden anotar el número de ejemplares que han vendido cada uno de los días laborables de una semana dada. Estos datos se muestran en la siguiente tabla.

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Número de ejemplares vendidos	74	97	91	86	112

Con estos datos, se realiza una prueba de determinación de la bondad del ajuste a un nivel de significación del 5%, para saber si el modelo de la tienda resulta adecuado. El valor crítico para esta prueba es $9{,}49$.

(a) Halle una estimación de cuántos ejemplares espera vender cada día la tienda. [1]

(b) (i) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para esta prueba.

(ii) Escriba el número de grados de libertad de esta prueba.

(iii) Escriba la conclusión a la que se llega con esta prueba. Dé una razón que justifique su respuesta. [7]

10. [Puntuación máxima: 6]

Un fabricante de bombones los envasa en cajas y afirma que cada caja contiene un promedio de 85 bombones.

Talha compra 30 de estas cajas para poner a prueba la afirmación del fabricante.

Siendo x el número de bombones individuales, Talha obtiene que, en sus 30 cajas, $\sum x = 2506$ y $\sum x^2 = 209\,738$.

(a) Halle una estimación sin sesgo del número medio (μ) de bombones por caja. [1]

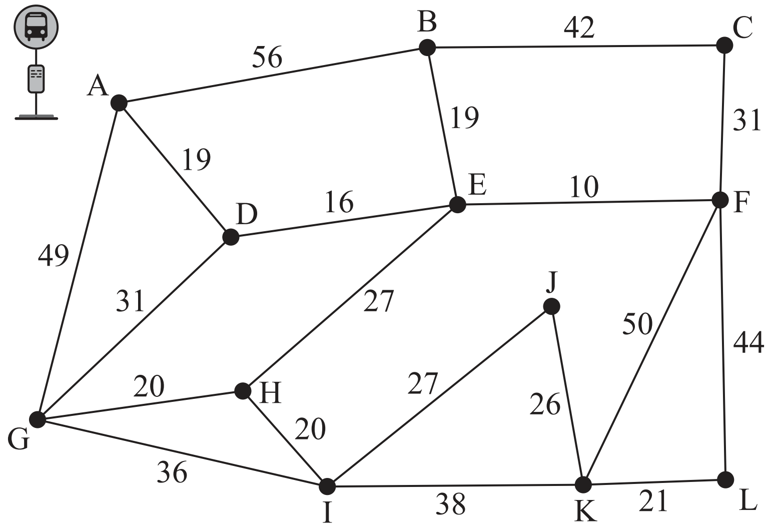
(b) Utilice la fórmula $s_{n-1}^2 = \dfrac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}$ para determinar una estimación sin sesgo de la varianza del número de bombones por caja. [2]

(c) Halle un intervalo de confianza del 95% para μ. Puede suponer que se cumplen todas las condiciones necesarias para calcular el intervalo de confianza. [2]

(d) Sugiera una conclusión válida a la que podría llegar Talha y justifique su respuesta. [1]

11. [Puntuación máxima: 7]

La siguiente figura muestra la red de calles de un pequeño pueblo, donde los pesos representan la longitud (en metros) de cada calle y los cruces se indican mediante letras.



Musab tiene que repartir folletos publicitarios a todas las casas de cada calle y quiere minimizar la distancia total recorrida.

(a) Musab empieza y acaba en la parada de autobús del pueblo, situada en A. Determine la distancia total que tendrá que caminar Musab. [5]

En lugar de tomar el autobús que va al pueblo, la hermana de Musab se ofrece a llevarle hasta algún cruce y a recogerle luego en cualquier otro cruce que él elija.

(b) Explique qué cruces debería elegir Musab como punto de salida y punto de llegada. [2]

12. [*Puntuación máxima: 8*]

Sean $z_1 = 3\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ y $z_2 = 2\operatorname{cis}\left(\frac{n\pi}{16}\right)$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) En los subapartados (a)(i) y (a)(ii), dé las respuestas en la forma $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $r \ge 0$, $-\pi < \theta \le \pi$.

(i) Halle el valor de $z_1{}^3$.

(ii) Halle el valor de $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4$ para $n = 2$. [5]

(b) Halle el valor más pequeño de n para el que se cumple que $z_1 z_2 \in \mathbb{R}^+$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

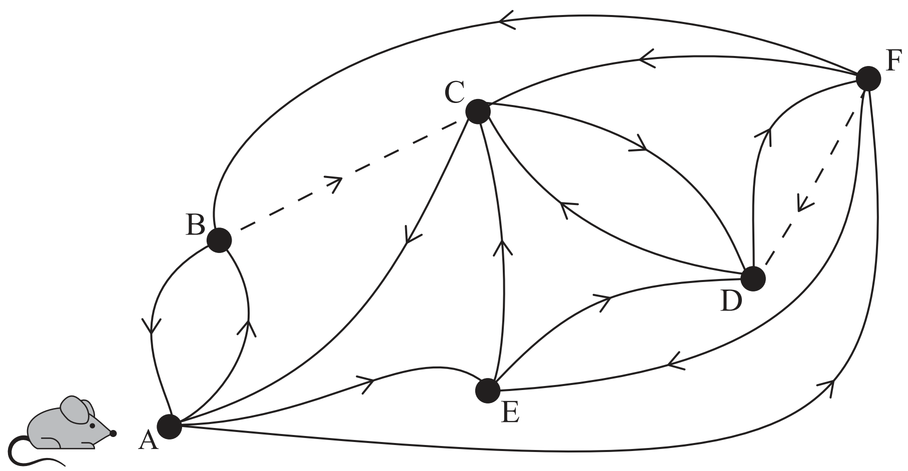
13. [Puntuación máxima: 8]

El siguiente grafo muestra un pequeño laberinto, en forma de una red de rutas orientadas. Los vértices (del A al F) representan los cruces que hay en el laberinto y las aristas muestran los caminos que se pueden tomar para ir de un vértice a otro.

Se coloca un ratón en el vértice A y se deja que deambule libremente por el laberinto. Las rutas que se representan con líneas discontinuas son caminos donde se ha espolvoreado azúcar.

Cuando el ratón llega a un cruce cualquiera, descansa una cantidad de tiempo constante antes de continuar.

En todos los cruces se puede suponer también lo siguiente:
- El ratón tiene la misma probabilidad de elegir cualquier camino normal disponible.
- Si del cruce sale un camino donde se ha espolvoreado azúcar, la probabilidad de que escoja ese camino es el doble que la de un camino normal.



(a) Determine la matriz de transición correspondiente a este grafo. [3]

(b) Suponiendo que al ratón se le dejara deambular indefinidamente, utilice la calculadora de pantalla gráfica para estimar el porcentaje del tiempo que el ratón pasaría en el punto F. [3]

(c) Comente la respuesta que dio en el apartado (b), mencionando al menos una limitación del modelo. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 13: continuación)

14. [Puntuación máxima: 7]

Una transformación geométrica $T\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ se define así:

$$T\colon \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Halle las coordenadas de la imagen del punto $(6\,,\,-2)$. [2]

(b) Sabiendo que $T\colon \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto 2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, halle el valor de p y el valor de q. [3]

(c) Un triángulo L, cuyos vértices están en el plano xy, se transforma mediante T.

Explique por qué L y su imagen tendrán exactamente la misma área. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

15. [Puntuación máxima: 7]

El número de cafés que se sirven cada hora en una cafetería independiente sigue una distribución de Poisson de media 22 cafés por hora.

Sheila, la propietaria del establecimiento, quiere aumentar el número de cafés que se sirven en su cafetería. Para ello, decide ofrecer un descuento a aquellos clientes que pidan más de un café.

Para poner a prueba la eficacia de esta estrategia, Sheila anota el número de cafés que se sirven a lo largo de un período de 5 horas consecutivas. Sheila decide utilizar un nivel de significación del 5% en su prueba.

(a) Indique la hipótesis nula y la hipótesis alternativa para esta prueba. [1]

(b) Halle la probabilidad de que Sheila cometa un error de tipo I al extraer la conclusión de la prueba. [4]

Sheila halla que se han servido 126 cafés durante ese período de 5 horas.

(c) Indique a qué conclusión llega Sheila con esta prueba. Justifique su respuesta. [2]

16. [Puntuación máxima: 8]

Una partícula P se mueve en línea recta, de modo tal que su desplazamiento x en el instante t $(t \geq 0)$ viene dado por la ecuación diferencial $\dot{x} = x \cos t \left(\mathrm{e}^{-\operatorname{sen} t}\right)$. En el instante $t = 0$, $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(a) Utilizando el método de Euler con un paso de $0{,}1$, halle el valor aproximado de x para $t = 0{,}3$. [3]

(b) Resolviendo la ecuación diferencial, halle el porcentaje de error que ha cometido en la aproximación de x para $t = 0{,}3$. [5]

Fuentes: